Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Michele Serra, Sarah Tanja Hess

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2021

Übungen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie
Blatt 2

Abgabe von: Mein Name
TutorIn: Mein(e) Lieblingstutor(in)

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 17 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 2.1 **[4 Punkte]**

Sei K ein Körper, L/K eine separable Körpererweiterung des Grades $n := [L : K] \in \mathbb{N}$, $\alpha \in L$ und $K \subseteq E \subseteq L$ eine Zwischenkörpererweiterung. Zeigen Sie $\mathrm{Sp}_{L/K}(\alpha) = \mathrm{Sp}_{E/K}\left(\mathrm{Sp}_{L/E}(\alpha)\right)$.

Lösung:

Aufgabe 2.2 **[2+2 Punkte]**

Sei K ein Körper, L/K eine endliche separable Körpererweiterung des Grades $n := [L : K] \in \mathbb{N}$, Ω die normale Hülle von L/K, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die paarweise verschiedenen K-Einbettungen von L in Ω, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von L/K, $\mathbb{B}$ bezüglich dieser Basis eine Matrixdarstellung von $B_{L/K}$ und $\mathcal{V} := (\mathcal{V}_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ definiert durch $\mathcal{V}_{ij} := \sigma_i(v_j)$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

(a) Beweisen Sie $\det(\mathbb{B}) = (\det \mathcal{V})^2$.

(b) Folgern Sie, dass $B_{L/K}$ nicht-ausgeartet ist.

Lösung:

Aufgabe 2.3 **[0,5+1+2,5 Punkte]**

Sei R ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich, $K := \mathrm{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von R, L/K eine endliche separable Körperweiterung des Grades $n := [L : K] \in \mathbb{N}$, $S := \overline{R}^L$ der ganze Abschluss von R in L und $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq S$ eine Basis von L/K. Betrachten Sie die Mengen

$$M := \sum_{i=1}^{n} R v_i \text{ und } M' := \left\{\alpha \in L \mid \forall \gamma \in M \colon \mathrm{Sp}_{L/K}(\alpha\gamma) \in R\right\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass M ein freies R-Moduln der Dimension n ist.

(b) Beweisen Sie, dass M' ein R-Modul ist.

(c) Zeigen Sie $M \subseteq S \subseteq M'$.

Lösung:

Definition
Sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein irreduzibles Polynom des Grades $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ alle Nullstellen von f mit Vielfachheiten. Die **Diskriminante von *f*** ist $D(f) := \prod_{i<j} (a_i - a_j)^2$.

Aufgabe 2.4* **[0,5+0,5+0,5+1+1+0,5 Punkte]**

Sei $f(x) := x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{Q}[x]$ ein allgemeines irreduzibles Polynom des Grades 3 mit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

(a) Betrachten Sie das Polynom $g(x) := f\left(x - \frac{a}{3}\right) \in \mathbb{Q}[x]$.

  (i) Bestimmen Sie g.

  (ii) Benennen Sie den Zusammenhang zwischen dem Zerfällungskörper von f und dem Zerfällungskörper von g. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

  (iii) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Diskriminante von f und der Diskriminante von g? Begründen Sie.

(b) Seien nun α, β, γ alle Nullstellen von g in einem Zerfällungskörper von g. Beweisen Sie

$$D(g) = -g'(\alpha)g'(\beta)g'(\gamma).$$

(c) Drücken Sie die Diskriminante $D(g)$ in Abhängigkeit der Koeffizienten von g aus.

(d) Folgern Sie einen Ausdruck für die Diskriminante $D(f)$ in Abhängigkeit der Koeffizienten a, b, c von f.

Lösung:

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 01. Juli 2021, um 10:00 Uhr**, direkt an den Tutor / die Tutorin. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.